جامعة البعث — سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) — المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — العلامة:(١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — امتحانات الفصل الأول ٢٠١٤-٢٠١٥

١٠

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة) :

أ)- لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قاعدة في E ولنأخذ أي متتالية كوشي $\{x^N\}$ في E .

عندئذٍ يكون: $x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N x_i \quad ; N = 1,2,3,\ldots$ ومن أجل $i = 1,2,3,\ldots,n$ يكون لدينا :

$$\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| = \left\|x^N - x^M\right\|_0 \xrightarrow[M\to\infty]{N\to\infty} 0$$

(7)

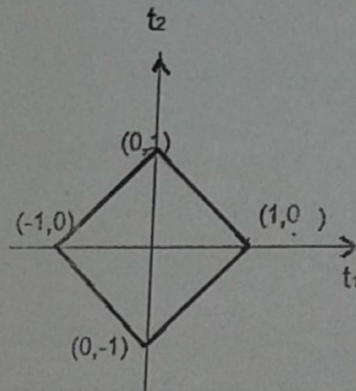
وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{\lambda_i^{(N)}\}$ هي متتالية كوشي (أساسية) من أجل $i = 1,2,3,\ldots,n$ فهي متقاربة (التقارب هنا التقارب الإحداثي) . نفرض أن $\lambda_i^{(N)} \to \lambda_i^0$ (حيث $i = 1,2,3,\ldots,n$) وأن $x^0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^0 x_i$ فنجد أن : $\left\|x^N - x^0\right\|_0 = \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ إذن E فضاء باناخ .

ب)- من خلال التظيم : $x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \|x\| = |t_1| + |t_2|$ نرى أن كرة الواحدة $S[\theta,1]$ نقاط في المستوي هي مجموعة نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ والتي من أجلها يكون :

(6)

$$S[\theta,1] = \{x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : |t_1| + |t_2| \le 1\}$$

وهي بالنسبة للتظيم المعرف أعلاه تمثل المربع الذي رؤوسه هي النقاط : $(1,0)$ و $(0,1)$ و $(-1,0)$ و $(0,-1)$ الواقعة على المحورين t_1 و t_2 ولها الشكل:





(7)

ج)- التعريف : الفضاء $C^m[a,b]$ رمز لمجموعة كل التوابع التي تملك مشتقات موجودة ومستمرة حتى المرتبة m .

لنأخذ التابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 28}$ وبدراسة تغيرات التابع نجد أنه متزايد في المجال $[1,5]$ ومتناقص في الفترة $5 \le x < \infty$ وبالتالي فإن نظيمه في فضاء المتتاليات العددية المحدودة يكون :

$$\|x\| = \sup_n |y_n| = \sup_n \left|\frac{1}{n^2 - 10n + 28}\right| = \left|\frac{1}{25 - 50 + 28}\right| = \frac{1}{3}$$

إذن : $\|x\| = \frac{1}{3}$

جواب السؤال الثاني (٢٥ درجة):

أ)- لنثبت أن d تابع مسافة ، حيث: $\xi, \eta \in \mathcal{S}$; $d(\xi,\eta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}$ لدينا :

$M_1)$ $d(\xi,\eta) \geq 0$. $\forall \xi, \eta \in \mathcal{S}$

$d(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi_n = \eta_n$; $\forall n = 1,2,\ldots \Leftrightarrow \xi = \eta$

$M_2)$ $d(\xi,\eta) = d(\eta,\xi)$

$M_3)$ لإثبات متراجحة **المثلث نأخذ التابع** المساعد التالي: $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$; $t > 0$

فنجد أن : $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$; $t > 0$ وبالتالي $\varphi(t)$ تابع متزايد دوماً. إذن من العلاقة

$|A+B| \leq |A| + |B|$ ، حيث A و B عددان حقيقيان، تنتج العلاقة: $\varphi(|A+B|) \leq \varphi(|A|+|B|)$

وبالتالي يكون لدينا:

8

$$\frac{|A+B|}{1+|A+B|} \leq \frac{|A|+|B|}{1+|A|+|B|} = \frac{|A|}{1+|A|+|B|} + \frac{|B|}{1+|A|+|B|}$$
$$\leq \frac{|A|}{1+|A|} + \frac{|B|}{1+|B|}$$

فإذا كانت الآن $\xi = \{\xi_n\}$ و $\eta = \{\eta_n\}$ و $\zeta = \{\zeta_n\}$ أية ثلاثة عناصر من $\mathcal{S}$ وعوضنا:

$B := \eta_n - \xi_n$ و $A := \xi_n - \eta_n$ نجد : $\frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|} \leq \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|} + \frac{|\eta_n - \xi_n|}{1+|\eta_n - \xi_n|}$

بضرب طرفي **هذه المتراجحة** بـ $\frac{1}{2^n}$ ومن ثم التجميع من 1 إلى ∞ نحصل على **متراجحة المثلث**:

$$d(\xi,\zeta) \leq d(\xi,\eta) + d(\eta,\zeta)$$

المسافة d **لا متغيرة الانسحاب** ; $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}$; $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$ نلاحظ

5

أن : $|x_k - y_k| = |x_k + z_k - y_k - z_k| = |x_k + z_k - (y_k + z_k)|$ بذلك فإن

$d(x+z, y+z) = d(x,y)$; $x, y, z \in X$ أي أن المسافة d **لا متغيرة الانسحاب** لحتى يكون

$(\mathcal{S}, d)$ **فضاءً مترياً خطياً** يجب أن تكون d مع العملية الجمعية وعملية الجداء **بعدد مستمرتين في** $(\mathcal{S}, d)$

ب)- **تكافؤ النظيمين** $\|x\|_2$ & $\|x\|_1$; كما نعلم يكون النظيمان المعرفان **على نفس الفضاء** ،
اذا **و فقط اذا نتج من تقارب** متتالية ما وفق احد النظيمين تقاربها بالنسبة **للنظيم الثاني** .

6

[illegible] $x_n(t) = t^n$ بالنسبة للنظيم $\|x_n\|$ [illegible]

$$\|x_n\|_2 = \left[\int_0^1 t^{2n}(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=0$$

إلا أنها لا تتقارب بالنسبة للنظيم $\|x\|_1$ بسبب أن تقاربها وفق هذا النظيم يكافئ التقارب المنتظم ،

وكما هو معروف تقارب هذه المتتالية نقطياً (أو بشكل نقطي) من النوع :

$$x(t)=\begin{cases} 0 & ; 0\le t<1 \\ 1 & ; t=1 \end{cases}$$

غير المستمر عند $t=1$ ، وبالتالي فهي لا تنتمي الى الفضاء $C[0,1]$ ، وهذا هو السبب في عدم تكافؤ النظيمين المفروضين.

- الفضاء $C[0,1]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنه ليس فضاء هلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\|_1=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t)=1$ و $y(t)=\frac{t-a}{b-a}$ فإننا نجد أن : $\|x\|=1$ وأنّ $\|y\|=1$:

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4$

في حين أنّ : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$ بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

<u>جواب السؤال الثالث (١٥ درجة) :</u>

$$d(Af_1,Af_2)=|Af_1-Af_2|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 xt[f_1(t)-f_2(t)]dt\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\overbrace{\max_{\substack{0\le x\le 1\\0\le t\le 1}}|xt|}^{1=}\cdot\max_{0\le t\le 1}|f_1(t)-f_2(t)|\le\frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}|f_1(t)-f_2(t)|=\frac{1}{2}d(f_1,f_2)$$

وبالتالي فإن A متقلص . ومن أجل إيجاد النقطة الثابتة نضع النقطة البدئية $f_0(x)=0$ ، ولنشكل المتتالية

$$f_1(x)=Af_0(x)=\frac{5}{6}x$$

$$f_2(x)=Af_1(x)=\frac{5}{12}\int_0^1 x.t^2.dt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

$$f_3(x)=Af_2(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)\int_0^1 x.t^2.dt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

15 9

....

$$f_n(x)=Af_{n-1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 x.t\,f_{n-1}(t).dt+\frac{5}{6}x$$

$$=\left(\frac{5}{6^n}+\frac{5}{6^{n-1}}+\dots\dots+\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

....

أي أن : $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}5x.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k=5x\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{5}{5}x=x$

وبالتالي فإن النقطة الثابتة هي x لأن : $f(x)=x$.

<u>جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة):</u> حسب درجات لكل إثباته طلب X ٤ = ٢٠ عشرون درجة

5 <u>إثبات الخطية :</u> من أجل أي عنصرين $x,y\in C[0,1]$ و $\lambda,\mu\in C$ فإن :

$$A(\lambda x+\mu y)=\int_0^1(t^2+s^2)(\lambda x(s)+\mu y(s))ds=$$

$$\int_0^1(t^2+s^2)\lambda x(s)ds+\int_0^1(t^2+s^2)\mu y(s)ds=$$

$$\lambda\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds+\mu\int_0^1(t^2+s^2)y(s)ds=\lambda A(x)+\mu A(y)$$

5 <u>إثبات المحدودية :</u>

$$\|Ax\|=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds\le\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\times\max_{t\in[0,1]}\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds=$$

$$\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\times\max_{t\in[0,1]}\left|(t^2s+\frac{1}{3}s^3)\Big|_0^1\right|=\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\max_{t\in[0,1]}\left|(t^2+\frac{1}{3})\right|=\frac{4}{3}\|x\|$$

إذن : $\|Ax\|\le\frac{4}{3}\|x\|$

4 (i) <u>لإيجاد النظيم</u> $\|A\|$ من المحدودية $\|Ax\|\le\frac{4}{3}\|x\|$ نجد أن : $\|A\|=\sup_{x\in C[0,1],\,x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\le\frac{4}{3}$

1 من جهة ثانية نأخذ $x(s)=1$ عندئذ يكون $\|x\|=1$ ويكون :

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds = \max_{t,s\in[0,1]} \int_0^1 (t^2+s^2).1ds =$$

$$\max_{t\in[0,1]} \left|(t^2 s + \frac{1}{3}s^3)\Big|_0^1\right| = \max_{t\in[0,1]} \left|(t^2+\frac{1}{3})\right| = \frac{4}{3}.$$

$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \ge \|Ax\| = \frac{4}{3}$ (2) . من(1) و (2) ينتج أن : $\|A\| = \frac{4}{3}$.

<u>المؤثر المرافق لـ</u> A : لنكتب Ax بشكل آخر $x = \int_0^1 (t^2+s^2)\, x(s)ds = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)ds$

حيث : $K(t,s) = \begin{cases} t^2+s^2 & ; s \le t \\ 0 & ; s > t \end{cases} \quad ; \; t \subset [0,1]$

بالتالي فإن : $(Ax, y) = \int_0^1 \overline{y(s)} \int_0^t K(t,s)\, x(s)ds\, dt$

$$= \int_0^1 x(s)ds \int_s^1 K(t,s)\overline{y(s)}\, dt = \int_0^1 x(s)ds \int_s^1 \overline{\overline{K(t,s)}\, y(s)}\, dt = (x, A^*y)$$

ومنه يكون $A^*(y(S)) = \int_0^1 \overline{K(t,s)}\, y(t)dt = \int_0^1 (t^2+s^2)\, y(t)\, dt$

وهنا : $\overline{K(t,s)} = \overline{(t^2+s^2)} = t^2+s^2$. ولما نتج أن $A^* = A$ <u>نستنتج أن المؤثر مترافق ذاتياً</u> .

<u>جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :</u>

<u>I</u>- لتكن المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ متقاربة من x، ولتكن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة أيضاً. وبما أن $D(A)$ مغلقة عندئذ يكون: $x \in \overline{D(A)} = D(A)$ ويكون أيضاً $\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$ ذلك لأن A مؤثر مستمر

بالاعتماد على خاصة المؤثر المغلق نستنتج أن A مؤثر مغلق.

<u>II</u>- لنأخذ أي عنصر $x \in \overline{D(A)}$ وبالتالي توجد متتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ بـ أن A مؤثر خطي محدود إذن $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\|\,\|x_n - x_m\|$

أي أن المتتالية $\{Ax_n\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء E_2. وبما أن الفضاء E_2 تام عندئذ المتتالية $\{Ax_n\}$ تتقارب من عنصر في E_2 وليكن y أي أن: $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ وبما أن A مغلق، وبحسب خاصة المؤثر المغلق يكون $x \in D(A)$ كما أن $Ax = y$. لذلك فإن $D(A)$ مغلقة ذلك كون العنصر x اختيارياً من $\overline{D(A)}$

حمص ٢/٢/ ٢٠١٥ مدرسا المقرر

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أ)- أثبت أن كل فضاء خطي منظم E ثوثي البعد هو فضاء باناخ .

ب)- إذا كان النظيم في $\mathbb{R}^2$ معطى بالعلاقة : $x=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad \|x\|=|t_1|+|t_2|$

فماذا تمثل الكرة الواحدية في $\mathbb{R}^2$ بالنسبة لهذا النظيم مع التوضيح بالرسم .

ج)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$. احسب في فضاء المتتاليات العددية المحدودنظيم العنصر x حيث :

$$x=\left\{\frac{1}{n^2-10n+28}\right\}_{n\geq1}$$

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

أ)- اذا كانت $\mathcal{S}$ مجموعة كل المتتاليات العددية اللانهائية و بفرض d تابع معرف بالشكل:

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\;\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|} \qquad ; x=\{x_n\}_{n\geq1}\;,\; y=\{y_n\}_{n\geq1}$$

أثبت أن d تابع مسافة . هل d مسافة لا متغيرة الانسحاب أم لا ؟ ولماذا ؟. ماهي الشروط الواجب

تحققها حتى يكون$(\mathcal{S},d)$ فضاء مترياً خطياً (من غير اثبات).

ب)- أوضح ، فيما اذا كان النظيمين الآتين متكافئين في الفضاء $C[0,1]$ ولماذا ؟

$$\|x\|_1=\max_{0\leq t\leq1}|x(t)| \qquad \& \; \|x\|_2=\left[\int_0^1 x^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

وهل هذا الفضاء فضاء جداء داخلي مع النظيم الأول $\|x\|_1$.

السؤال الثالث (١٥ درجة):

أثبت أن التطبيق المعرف بالعلاقة : $A:C[0,1]\to C[0,1]$ حيث:

$A(f(x))=\frac{1}{2}\int_0^1 x.t.f(t)dt+\frac{5}{6}$ هو تطبيق ضاغط . ثم أوجد النقطة الثابتة له .

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن المؤثر A من الفضاء $C[0,1]$ في نفسه والمعرف كالآتي :

$$Ax=\int_0^1(t^2+s^2)\,x(s)ds \qquad , \; t\in[0,1]$$

أثبت أن هذا المؤثر <u>خطي</u> و<u>محدود</u> وأوجد <u>نظيمه</u> ثم اوجد <u>المؤثر المرافق لـ</u> Aماذا <u>تستنتج</u> ؟ .

السؤال الخامس (٢٠ درجة):

ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً من الفضاء الخطي المنظم E_1 في الفضاء الخطي المنظم E_2 ، أثبت ما يلي:

I - إذا كانت $D(A)$ مغلقة في الفضاء E_1 عندئذٍ يكون A مغلقاً.

II- إذا كان E_2 فضاءً تاماً وكان المؤثر A مغلقاً عندئذٍ تكون $D(A)$ مجموعة جزئية مغلقة في E_1 .